Gestione del rischio

Dicembre 2022

schemi di gina

Tipologia 1 : misure di rischio per qualsiasi mercato

Value at Risk ≡ il caso migliore dell'α% dei casi pessimi / α-percentile

$VaR_\alpha = K_\alpha$. $\quad K_\alpha = \min_i \{ y_i : \mathbb{P}(Y < y_i) \le \alpha \ \wedge \ \mathbb{P}(Y \le y_i) > \alpha \}$ ↦ misura non coerente del rischio (spesso non vale la sub-additività)

Expected Shortfall ≡ il caso medio dell'α% dei casi pessimi

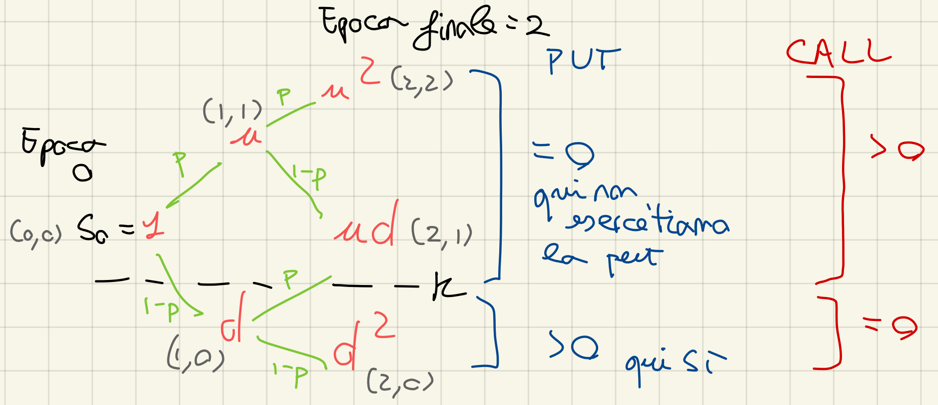
$$ES_\alpha = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{j<i:\, y_i = K_\alpha} p_j y_j + \Big(\alpha - \sum_{j<i:\, y_i = K_\alpha} p_j\Big)\cdot K_\alpha \right)$$ ↦ misura più coerente di rischio

Tipologia 2 : opzioni put & call, modello binomiale: gestione del rischio nel mercato azionario

Solitamente: $S_0 = 1 \qquad u = \frac{1}{d}$

n ≡ numero epoca finale

$t = \Delta n$



$(i, j) = (\#\text{epoca}, \#\text{volte in cui andato } u)$

CALL: $$O(S_0, t, K, r, n) = (1+r)^{-t} \cdot \left(\sum_{j=j^*}^{n} \left(S_0 \cdot d^{n-j} \cdot u^j - K\right) p^j (1-p)^{n-j} \binom{n}{j} \right)$$

PUT: $$O(S_0, t, K, r, n) = (1+r)^{-t} \left(\sum_{j=0}^{j^*} \left(K - S_0 d^{n-j} \cdot u^j\right) p^j (1-p)^{n-j} \binom{n}{j} \right)$$

j^* = stabilito rispetto K

⚠ se le incognite sono u ed, allora fine dei conti, controllare che K sia stato messo nel posto giusto

PARITÀ PUT - CALL (si può fare arbitraggio ⟺ la parità non è rispettata)

$$\underbrace{S_0 + put}_{X} \; \substack{> \\ = \\ <} \; \underbrace{call + K(1+r)^{-t}}_{Y}$$

↦ c'è parità se vale l'=. Quindi se non sono consentiti arbitraggi, avendo una fra PUT e CALL posso ricavare l'altra

Se invece il nostro obiettivo è fare arbitraggio, dobbiamo prima vedere se sono > o <.

CASO $X > Y$

Strategia epoca 0:
- vendo un titolo allo scoperto e incasso $1 = S_0$
- vendo una put e incasso 0,04
- compro una call e pago 0,06

FLUSSO tot. epoca 0: $1 + 0,04 - 0,06 = \underbrace{0,98}_{K}$

Montante epoca 2: $0,98 \cdot \underbrace{(1,03)^2}_{\text{tasso d'interesse}}$

Due scenari epoca 2 (che è la nostra epoca finale)

(1) $S_2 \leq K$
- viene esercitata la put, compro un titolo a 0,98
- non esercito la call perché $S_2 < K$
- restituisco il titolo preso in prestito

Flusso tot: $-0,98$

(2) $S_2 > K$
- non viene esercitata la put
- esercito la call ($S_2 > K$) compro un titolo a 0,98
- restituisco il titolo preso in prestito

Flusso tot.: $-0,98$

⟹

Guadagno epoca 2

$\underbrace{0,98 \cdot (1+r)^2}_{\text{montante esercitato epoca 0}} - 0,98$ ← in entrambi gli scenari è 0,98

$\exists$ ARBITRAGGIO $\Leftrightarrow \exists V$ PORTAFOGLIO DI REPLICA t.c.

$V_0 = 0$ ("parto con niente")

$\mathbb{P}(V_1 > 0) = 1$

↳ mi permette di guadagnare a rischio 0

Δ - Hedging

Questa volta guardiamo i nodi che precedono la "scadenza" e ci occupiamo di rispondere alla domanda qual è l'α da investire nel nodo (i,j) per costruire un portafoglio di replica?

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = \alpha$$

↳ come cresce la put al variare del prezzo sottostante S_t

Quantità di titoli da acquistare per costruire un portafoglio di replica

α: CALL: $\alpha \geq 0$ sempre; PUT: $\alpha \leq 0$ sempre

Formula per α (è in funzione dei nodi successivi):

$$\alpha(i,j) = \frac{PUT(i+1, j+1) - PUT(i+1, j)}{S(i+1, j+1) - S(i+1, j)}$$

(stessa formula in caso di CALL)

Nodi scadenza: se la PUT/CALL non viene esercitata, α è automaticamente 0. Se invece viene esercitata $\alpha = -1$ (PUT), $\alpha = 1$ (CALL)

⚠ Il valore della PUT (quando ≠0) in un nodo "epoca finale" è $K - S_{t_f}$; CALL $S_{t_f} - K$

↳ t_f

Trucco: 1,0.. la penso come $(1+x)$, $x \sim 0$

$\Rightarrow (1+x)^\alpha \underset{\text{Taylor}}{\simeq} 1 + \alpha x$ ↳ vale anche per α negativi, quindi ottimo per calcolare velocemente S_t..

Tipo di opzione → Europea = si esercita solo a scadenza
→ Americana = si può esercitare in ogni momento

O_A^P = modo per dire opzione PUT americana

$$O_A^P = \max \left\{ k - S(i,j), (1+r)^{-1} \left[p O_A^P(i+1, j+1) + (1-p) O_A^P(i+1, j) \right] \right\}$$

! α si calcola con la stessa formula

Tipologia 3

Obiettivo: calcolare ES_α e VaR_α partendo da un portafoglio composto da più titoli (Metodo Montecarlo): mercato azionario

$T=0$ $\quad V_0 = d_1 + \dots + d_k$, mi occupo solo di $T=1$ $\quad V_1 = \sum_{i=1}^{k} d_i (1+r_i)$

↳ variabile aleatoria che stabilisce al tempo 1 se/quanto ho guadagnato o perso

! le r_i sono v.a. con la stessa distribuzione. Non conosciamo la loro distribuzione, ma sappiamo che sono CORRELATE ⇒ non indipendenti

ρ = matrice di correlazione degli r_i è simmetrica e def. positiva

$\rho(i,i) = 1 \ \forall i \qquad \rho(i,j) = \rho(j,i) \in [0,1]$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} = A A^T$$

= → decomposizione di Cholevsky

A = triangolare inf.
A^T = tri. sup.

r_i correlati ⇒ Non indipendenti. Siano X_i t.c. $X_i \sim r_i$ (ha la stessa distribuzione), ma gli X_i sono indipendenti, a differenza degli r_i.
X_i i.i.d.

FATTO

$$A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix} \text{ t.c. la matrice di correlazione degli } Y_i = \rho$$

FATTO ⇒ posso fingere che gli Y_i siano proprio gli r_i

N.B. Negli esercizi partiamo a Metodo Montecarlo già concluso, lavorando con tot. realizzazioni degli X_i (ottenute tramite il metodo)

Tipico svolgimento di un esercizio:

(1) Fatto + Montecarlo ⇒ ricavo subito le realizzazioni degli r_i

(2) Uso le realizzazioni degli r_i per stimare la distribuzione di probabilità del mio portafoglio nella maniera seguente:

- calcolo le realizzazioni del mio portafoglio tramite quelle degli r_i:

$$V_{1}(j) = \sum_{i=1}^{k} d_i (1 + r_i(j))$$

realizz. j-esima del mio portafoglio

realizzazione j-esima r_i

- riordino in maniera crescente tali realizzazioni

(3) Supponiamo che il portafoglio assuma questi valori con probabilità uniforme

(4) A questo punto il calcolo di VaR_α ed ES_α si riduce a quello a 1 variabile

Tipologia 4 Duration & Immunizzazione: gestione del rischio nel mercato delle obbligazioni (BOND)

Un'operazione finanziaria è una coppia (X, T), $X = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vettore degli importi, $T = (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vettore dei tempi,

↳ prevede scambi di flussi tra due soggetti in un numero finito di epoche

↳ Noi ci occupiamo delle obbligazioni con cedole

Operazioni
- di puro finanziamento se $\exists t^* : \forall t_j < t^* \quad x_j > 0$
- di puro investimento se $\exists t^* : \forall t_j > t^* \quad x_j > 0$

se abbiamo alternanza di flussi positivi e negativi non si può parlare di nessuno dei due

Le obbligazioni con cedole sono casi particolari di operazioni di puro finanziamento (se siamo l'emittente) o investimento (se siamo l'acquirente), a seconda del lato da cui le si guarda.

→ Siano P il prezzo, N la nominale, e supponiamo s.p.g. una struttura piatta dei tassi per scadenza (tasso costante). Allora possiamo schematizzare le obbligazioni con cedola costante:

Definiamo il valore attuale netto (rendimento economico attualizzato):

$$VAN(0, X, T, i) = \sum_{k=0}^{n} x_k (1+i)^{-t_k} \quad , \quad t_k = \Delta k$$

Il valore della generica operazione finanziaria a tasso costante valutata all'epoca t:

$$VAN(t, X, T, i) = (1+i)^t \, VAN(0, X, T, i)$$

TIR ($\exists$ solo se abbiamo flussi di segno diverso), il tasso interno di rendimento è t.c. ci rende il valore in 0 dell'operazione finanziaria pari a 0:

$$i^* : \quad VAN(0, X, T, i^*) = 0 \Rightarrow VAN(t, X, T, i^*) = 0 \quad \forall t$$

Rischio del mercato obbligazionario: dipende dal tasso di interesse i (poiché $V(0, X, T, i)$ è in realtà funzione di i)

FATTO

→ PURO FINANZIAMENTO valore attuale crescente al crescere del tasso i

→ PURO INVESTIMENTO valore attuale decrescente al crescere del tasso i

Flat yield curve duration (durata media dell'operazione finanziaria) Non consideriamo più x_0 e t_0, ma solo $(x_1, -, x_n), (t_1, -, t_n)$

$$[t_1, t_n] \ni D(X, T, i) = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k x_k (1+i)^{-t_k}}{V(0, X, T, i)}$$

→ misura la sensitività del valore attuale del contratto rispetto variazioni del tasso i

infatti $\frac{\partial D}{\partial i} < 0$. La variazione di prezzo cresce al crescere della duration.

FATTI: (1) $\frac{dV}{di} < 0$, cioè il valore attuale del contratto decresce al crescere di i

(2) $\frac{d^2V}{di^2} > 0$ $V(i)$ è convessa

Sia $\boxed{D^{(m)} = \frac{D}{i+1}}$ duration modificata (o volatilità del prezzo)

(3) $V(i+\Delta i) \simeq V(i)(1 - D^{(m)}\Delta i)$ stima per difetto

(3) $\Rightarrow$ La duration rappresenta l'epoca alla quale il cash-flow risulta immunizzato rispetto alle conseguenze sul prezzo del contratto che derivano da una variazione del tasso di interesse

(2) $\Rightarrow$ $V(i+\Delta i) \simeq V(i)(1 - D^{(m)}\Delta i + \frac{1}{2} C \Delta i^2)$, $\boxed{C = \frac{1}{V}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)x_k(i+1)^{-(k+2)}}$

(stima migliore della precedente)

convexity: l'investitore preferirà i titoli con convexity più elevata: perché se il tasso si riduce il prezzo aumenta in percentuale più di quanto si riduca se il tasso aumenta tanto più è grande la convexity del titolo

Strategie:

	Aspettative di riduzione dei tassi	Aspettative di aumento dei tassi
Operazioni di investimento	$\Delta V > 0$ titoli con duration elevata	$\Delta V < 0$ titoli con duration breve
Operazioni di finanziam.	$\Delta V < 0$ titoli con duration breve	$\Delta V > 0$ titoli con duration elevata

Rischio di tasso: eventualità di non conseguire i risultati che - in assenza di variazioni di tasso - avremmo ottenuto

Rischio di tasso = rischio di reimpiego (o reinvestimento) + rischio di prezzo (o realizzo)

Da osservazioni pratiche si nota che queste due componenti non si cumulano ma, in qualche modo, si "compensano" $\Rightarrow$ IDEA: proteggersi dal rischio di tasso mediante la compensazione delle sue due componenti

La duration indica l'epoca alla quale l'investimento risulta immunizzato

È possibile immunizzarsi all'epoca D qualsiasi se il mercato offre titoli con duration $D_1 < D < D_2$ tramite la costruzione di un portafoglio immunizzante.

V = portafoglio

V_1, V_2 denaro investito risp. in titolo 1 e 2

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = V & \text{(vincolo di bilancio)} \\ \dfrac{D_1 V_1 + D_2 V_2}{V_1 + V_2} = D & \text{(vincolo di duration)} \end{cases}$$

Affinchè il portafoglio risulti immunizzato per l'epoca D occorre investire V_1 nel primo titolo e V_2 nel secondo, dove

$$(*) \begin{cases} V_1 = V \cdot \dfrac{D_2 - D}{D_2 - D_1} \\ V_2 = V \cdot \dfrac{D - D_1}{D_2 - D_1} \end{cases}$$

quindi devo acquistare
- $n_1 = \dfrac{V_1}{P_1}$ del titolo t_1
- $n_2 = \dfrac{V_2}{P_2}$ del titolo t_2

⚠ se io devo immunizzare X € per l'epoca t^*, $V = X \cdot (1+i)^{-t^*}$, a questo punto risolvo (*) trovando V_1 & V_2.

NB P_1 = (Van titolo 1 con somma che parte da 1) $\cdot (1+i)^{-D_1}$

P_2 = (VAN titolo 2 con somma che parte da 1) $(1+i)^{-D_2}$

Tipico svolgimento esercizi:

- Calcolo del TIR
- Calcolo della duration di un investimento / finanziamento a un dato tasso i
- Portafogli di immunizzazione (singola uscita)
- Portafogli di immunizzazione (più uscite)

Partiamo da
$y = (-y_1, -y_2)$
$t_y = (t_{1y}, t_{2y})$
$X = (c, x_2)$
$t_X = (\underbrace{t}_{\text{incognita}}, t_{2x})$

1. Calcoliamo Duration(y) + $\underbrace{V(\text{Duration } y)}_{v_y} = (1+i)^{D_y}$ VAN(0)

2. X immunizza y ⟺
$$\begin{cases} D_X = D_Y \\ V_X = V_Y \end{cases}$$
da qui ricavo c e t aiutandomi ponendo $c(1+i)^{-t} = k$

3. Calcolo le derivate seconde di $V_y(i, D_y)$ / $V_x(i, D_x)$ in funzione di i come incognita

è vero che X immunizza Y $\Leftrightarrow$

$$V''_x(i_*) \geq V''_y(i_*)$$

i_* è il tasso che usiamo

Tipologia 5: derivati su tassi di interesse: swap, cap, floor

↳ possibilità di pagare un massimo tasso di interesse o incassare un minimo tasso di interesse

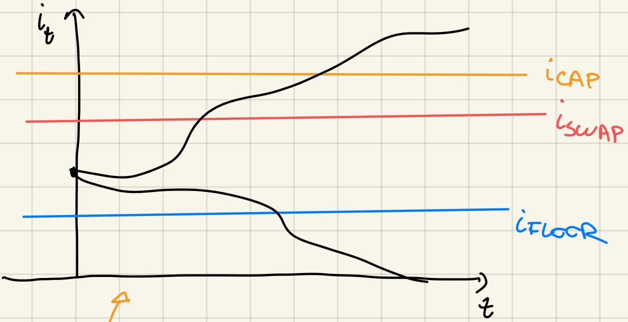
SWAP

"cambio del flusso di pagamenti" ↳ non voglio accettare il rischio di oscillazione dei tassi, ma pagarne uno costante (o viceversa)

struttura aleatoria tassi di interesse $\xleftarrow{\text{SWAP}}\!\!\xrightarrow{}$ struttura a tasso fisso

↳ tramite lo swap posso passare indistintamente da una delle due all'altra

SWAP ≡ trasferimento di rischio di variazione di tasso di interesse



↳ è come se i_{CAP} & i_{FLOOR} costituissero un corridoio nel quale devono stare i tassi per contratto

CAP

"opportunità per un debitore a tasso variabile di pagare a un livello massimo prefissato del tasso di interesse" ↳ $i_{CAP} = \limsup \{i$ tasso che sono disposto a pagare$\}$
Anche se il tasso sale rispetto a i_{CAP}, io comunque pago i_{CAP}

FLOOR

"opportunità per un creditore a tasso variabile di incassare un flusso a livello minimo di tasso di interesse" ↳ $i_{FLOOR} = \liminf \{i$ tasso che sono disposto a incassare$\}$
Anche se il tasso scende rispetto a i_{FLOOR}, comunque nelle transazioni il mio debitore usa i_{FLOOR}

⚠ Come in precedenza, lavoriamo nel caso discreto, anche se molte definizioni/concetti sono definiti nel continuo

Ipotesi: (1) Assegnamo a ogni intervallo di tempo fissato $[t_{j-1}, t_j]$ una variabile aleatoria tasso di interesse I_j

(2) Supponiamo che ogni I_j abbia k realizzazioni : $i_{j,k}$ = tasso d'interesse epoca j, realizzazione k

In caso di realizzazione di scenario k-esimo (in ex-post osservo che questo è lo scenario che si è verificato) allora il fattore di sconto per un importo esigibile all'epoca j:

$$f_k(j) = (1+i_{1,k})^{-1} \cdot (1+i_{2,k})^{-1} \cdot \dots \cdot (1+i_{j,k})^{-1} \quad \forall j$$

⚠ in una struttura a tasso variabile a ogni esercizio devo adattare il rispettivo tasso

COSTO SWAP: (ci sono due posizioni simmetriche nella swap; qui sto definendo tutto dal punto di vista di un debitore a tasso variabile)

C_j = variabile aleatoria pagamento epoca j

Contributo quota interessi epoca j:

$$\mathbb{E}[C_j] = x_{j-1} \cdot \left[(i_{j,1}-i) \cdot f_1(j) \cdot p_1 + \dots + (i_{j,k}-i) \cdot f_k(j) \cdot p_k \right]$$

scambio tassi variabili i_{ij} con $i_{CAP} = i$

dipende tutto da queste differenze se al momento dello scambio pago o incasso

Costo totale di una swap:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[C_j]$$

N.B. una volta che li ho costruiti li ho già attualizzati

COSTO CAP: Il pagamento è sempre del soggetto che sta pagando a tasso variabile

contributo quota interessi epoca j:

$$\mathbb{E}[C_j] = x_{j-1} \left[\max(i_{j,1} - i_{CAP}, 0) \cdot f_1(j) \cdot p_1 + \dots + \max(i_{j,k} - i_{CAP}, 0) f_k(j) \cdot p_k \right]$$

Il tasso CAP è una sorta di assicurazione che il pagatore di tasso variabile fa rispetto a non pagare tassi più alti di una certa soglia.

Costo totale di un CAP:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[C_j]$$

COSTO FLOOR: (lo paga il creditore a tasso variabile per i_{FLOOR})

Contributo quota interessi a para j:

$$\mathbb{E}[c_j] = x_{j-1}\left[\max(i_{FLOOR} - i_{j,1}, 0) \cdot f_1(j) \cdot p_1 + \dots + \max(i_{FLOOR} - i_{j,k}, 0) \cdot f_k(j) \cdot p_k\right]$$

↦ il creditore a tasso variabile attiva un contratto floor in modo tale che ci sia un certo soggetto che gli da l'integrazione dei tassi se sono bassi

Proprietà (del valore di SWAP, CAP & FLOOR)

$$i_{SWAP} = i_{CAP} = i_{FLOOR} \iff Val(SWAP) = Val(CAP) - Val(FLOOR)$$

⚠ Il costo della SWAP può essere visto come funzione lineare del tasso costante i: $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[c_j] = g(i)$

$$\text{tasso variabile} \xrightarrow{SWAP} \text{tasso fisso}$$

$\Rightarrow$ risolvo $g(i) = M$

$$\text{tasso variabile} \xleftarrow{SWAP} \text{tasso fisso}$$

$\Rightarrow$ risolvo $g(i) = -M$

E per CAP & FLOOR? devo creare una funzione ad hoc per ogni intervallo a cui apporto questi tassi

Tipologia 6: rischio di credito

Rischio di credito: che corre il creditore di non vedersi rimborsare parte/tutto il denaro dato in prestito al debitore
↳ dell'emittente nella valutazione di obbligazione (possiamo pensarla come prezzo)

→ Tratteremo l'aspetto del rischio che prende la banca/il singolo investitore investe parte del suo patrimonio in obbligazioni

→ Per un'istituzione finanziaria il rischio di credito è concedere un finanziamento/dei prestiti e monitorare la capacità dei destinatari di restituire quanto avuto in prestito
↳ effetto sull'affidabilità di un emittente sul tasso di interesse (TIR) della obbligazioni emesse
↳ (percentuale di interesse su un prestito)

Aspetti da Monitorare
- → RATING: misura l'affidabilità di un emittente
- → TASSO DI INTERESSE: dipende dal prezzo di mercato

Momenti in cui monitoriamo
- Emissione dell'obbligazione
  - Emittente con scarso rating
    - → non siamo disposti a pagare un prezzo alto
    - → probabilmente prezzo sotto la nominale
  - Emittente con alto rating
    - → siamo disposti
    - → prob. prezzo ≥ Nominale
- Obbligazione in corso d'essere
  - ↳ Un cambiamento di affidabilità/rating cambia il prezzo

Esempio: ZCB senza rischio (AAA)

$$TIR = \frac{\text{Nominale}}{\text{prezzo corrente}} - \text{scadenza}$$

(tasso interno di rendimento)

Esempio: ZCB a rischio di default (insolvenza) prima della scadenza con probabilità p

Sia i dato dalla struttura a termine dei tassi

$$\text{Prezzo ZCB tra un anno} = \underbrace{100\cdot(1-p)}_{\text{nominale che incasso con prob. } 1-p} + \underbrace{0\cdot p}_{\text{se vado in default non incasso nulla}}$$

; $\text{Prezzo ZCB attualizzato} = 100\cdot(1-p)(1+i)^{-1}$

→ Se io osservo 2 ZCB di 2 stati con RATING DIVERSI (e ho dunque prezzi diversi), posso calcolare qual è la probabilità di default che il mercato assegna a quello che costa meno/al meno affidabile, se assumo che la probabilità di default dell'altro sia pari a 0

SPREAD: differenza di TIR tra titoli diversi (nei nostri esempi spesso tra AAA e inferiori) è uno strumento di misura dell'affidabilità dell'emittente

↳ spread alto ⇒ capacità di finanziamento peggiore

Continuo esempio: calcoliamo anche il TIR del secondo titolo, e calcoliamo lo spread S:

$S = TIR_2 - TIR_{AAA}$ →
- collegamento diretto tra SPREAD e probabilità di default
- collegamento diretto tra prezzo e probabilità di default

→ misura il rischio di credito

RATING: le società di revisione internazionali attribuiscono un rating a ogni emittente, che serve per descriverne l'affidabilità:

↳ sono valutati con cadenza temporale fissata (solitam. 3 mesi o 6 mesi)
⇒ a livello statistico possiamo monitorare la probabilità che un emittente, anche nel periodo successivo mantenga lo stesso rating o si modifichi nella scaletta

AAA ~ probabilità di Default 0/0 rischio di credito
AA
A
BBB
BB
B
C
D (default)

matrice di transizione $M = (m_{ij})$, $m_{ij} = P_{ij} \equiv$ probabilità di passare dal rating i al rating j. , M matrice $D \times D$: ultima colonna D perché valuta la prob. di passare a default

↳ Matrice stocastica: la somma degli elementi di una riga è 1.

PUNTO FOCALE: valutare la probabilità di finire nello stato di default a partire da un certo rating iniziale in un numero prefissato di "passi" (es. se il rating viene valutato ogni trimestre 1 passo = 3 mesi)

→ Ogni matrice stocastica caratterizza una **CATENA DI MARKOV**: una successione di distribuzioni di variabili aleatorie discrete, osservate a epoche equidistanti

→ Una variabile aleatoria misura il rating dell'emittente e per una data v.a. avremo una distribuzione di probabilità associata che dipenderà dalla matrice M

Evoluzione della distribuzione di probabilità di appartenere alle varie classi in epoche successive (0, 1, ...).

Sia $A(0) = (a_1(0), \dots, a_D(0))$ → vettore che racchiude le probabilità di appartenere alle varie classi all'epoca 0. Si noti che $\sum_{i=1}^{D} a_i(0) = 1$.

vettori di taglia $1 \times D$

$\Rightarrow A(k) = A(0)M^k$

$\Rightarrow A(t+k) = A(t)M^k$

⚠

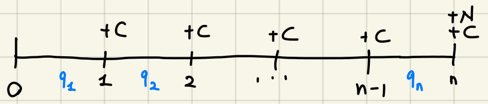
$\lim_{k \to +\infty} A(t+k) = (0, \dots, 0, 1)$ → mi dice che sono in default

La stato di default è "assorbente", ovvero assorbe su di se tutte le possibili traiettorie

→ Per la valutazione della probabilità di default (affidabilità) dell'emittente ci interessa la successione $a_n = a_D(n)$ delle probabilità di default nell'n° periodo. La calcoliamo fino a $\bar{n}$ = durata della nostra obbligazione / n° cedole che vengono pagate

Valore attuale atteso dell'investimento

(ci interesserà eguagliarlo al prezzo di mercato per calcolare i tassi)



Sia $q_i = a_D(i)$ probabilità di default periodo i.

$1 - q_1 - \dots - q_n$ probabilità di non default.

$\delta \in [0, 1]$ tasso di recupero pagato alla scadenza.

Valore attuale atteso investimento = CASO CON DEFAULT + CASO DI NON FALLIMENTO

CASO CON DEFAULT: $q_1\left[\alpha\cdot 100\cdot(1+i)^{-n}\right] + q_2\left[C(1+i)^{-1}+\alpha\cdot 100(1+i)^{-n}\right] + \dots + q_j\left[\underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} C\cdot(1+i)^{-k}}_{\text{conto delle cedole attualizzate. N.B. pago cedole fino al momento del default}} + \underbrace{\alpha\cdot 100(1+i)^{-n}}_{\text{anche se c'è default, col tasso di recupero, restituisco alla scadenza la nominale}}\right] + \dots + q_n\left[\sum_{k=1}^{n-1} C\cdot(1+i)^{-k} + \underbrace{\alpha\cdot 100\cdot(1+i)^{-n}}_{\text{NB non ci sarà mai l'ultima cedola}}\right]$

CASO DI NON FALLIMENTO: $(1-q_1-\dots-q_n)\left[\sum_{k=1}^{n-1} C(1+i)^{-k} + \underbrace{(100+C)(1+i)^{-n}}_{\text{qui ho tutte le cedole e il nominale!}}\right]$

$\Rightarrow$ Posso scrivere il valore attuale atteso dell'investimento come:

$$C(1+i)^{-1}(1-q_1) + C(1+i)^{-2}(1-q_1-q_2) + \dots + C(1+i)^{-n+1}(1-q_1-\dots-q_{n-1}) + C(1+i)^{-n}(1-q_1-\dots-q_n) + \left[\underbrace{\alpha\cdot 100(q_1+\dots+q_n)}_{\text{se ho default recupero}} + 100(1-q_1-\dots-q_n)\right](1+i)^{-n}$$

Osservazione: i_A & i_B sono TIR di un'operazione finanziaria con emittenti di rating A/B. $i_B - i_A > 0$

- all'emittente con rating B è chiesto un tasso più alto
- questo è quello che conosciamo come SPREAD (differenziale di tassi)

Nello svolgimento degli esercizi:

Nostre ipotesi: 2 anni (tutte equazioni di 2° grado); sappiamo prezzo di mercato & rating iniziale. Richiedono: "TIR" garantito dal prodotto, ovvero i: valore atteso attuale investimento = prezzo di mercato

- 2 epoche 3 livelli di rating (A, B, D)

- prezzo   +C   +N +C

0   q_1 1 q_2 2

ci interessa valutare q_1 e q_2 sia partendo da rating A, che B

poiché variazione di rating $\Rightarrow$ diverso rendimento del titolo

TIPOLOGIA 6

i = risk free

La valut. del rischio di credito dell'emittente può essere esprimibile in due modi:

(i) $P_B = C(1+i_B)^{-1} + C(1+i_B)^{-2} + \dots + (100+C)(1+i_B)^{-n}$

(ii) $P_B = C(1+i)^{-1}(1-q) + C(1+i)^{-2}(1-2q) + \dots + (100+C)(1+i)^{-n}(1-nq) + 100 \cdot d \cdot (1+i)^{-n} \cdot nq$

$$\underbrace{CDS}_{\text{per proteggersi da downgrade primi } t^* \text{ periodi}} = d(1)(1+i_A)^{-1} P_{AB} + d(2)(1+i_A)^{-2} P_{AA} \cdot P_{AB} + \dots + d(t^*)(1+i_A)^{-t^*} P_{AA}^{t^*-1} P_{AB}$$

T = scadenza

dove $d(j) = \underbrace{100}_{\text{(zero BCB)}} \left[(1+i_A)^{j-T} - (1+i_B)^{j-T} \right]$